Anwendung: Schwerpunkt eines Vierecks (Abb. 4.55)
Gegeben sei Viereck $ABCD$. Man berechne seinen Flächenschwerpunkt sowie seinen Eckenschwerpunkt.

Lösung:
Wir zerlegen das Viereck in zwei Dreiecke ABC und ACD. Von diesen berechnen wir die Schwerpunkte S_1 und S_2 sowie die „Massen“ (=Flächen) m_1 und m_2. Der Gesamtschwerpunkt S hat dann mit Formel (4.15) den Ortsvektor

$$\vec{s} = \frac{1}{m_1 + m_2}(m_1\vec{s_1} + m_2\vec{s_2})$$

Der Eckenschwerpunkt ist einfach das „Mittel“ der Eckpunkte:

$$\vec{s_E} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

Er stimmt im allgemeinen Fall natürlich nicht mit dem Flächenschwerpunkt überein.

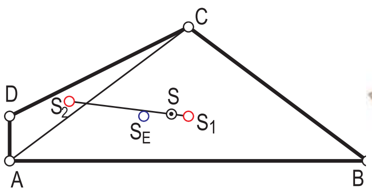

Abb. 4.55 Schwerpunkt des Vierecks

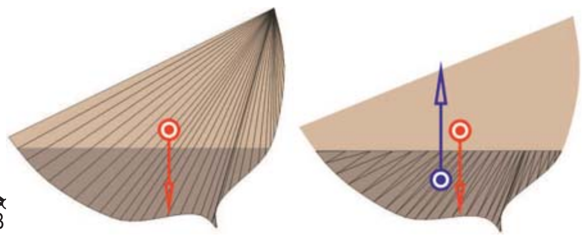

Abb. 4.56 Abtrieb und Auftrieb

Anwendung: Abtriebs- und Auftriebskräfte (Abb. 4.56)
Ein Schiffskörper sinkt – je nach Schwere des Schiffs – bis zu einem gewissen Level in das Wasser ein. Wie weit sinkt er ein? Welche Kräfte treten auf, und wann halten sie das Gleichgewicht? Was wird passieren, wenn der Rumpf schräg im Wasser liegt?

Lösung:
Wir vereinfachen den Gedankengang, indem wir nur einen charakteristischen Querschnitt des Schiffs betrachten. Die Durchführung der folgenden Berechnungen überlässt man natürlich dem Computer.

- Man kann sich nun das Gewicht in seinem Schwerpunkt angreifend denken (Abb. 4.56, links). Zu diesem Zweck triangulieren wir den Querschnitt. Der Gesamtschwerpunkt wird dann mit Formel (4.16) berechnet. Das Gewicht ist proportional zur Gesamtfläche.

- Der Auftrieb ist nach *Archimedes* gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Die Kraft greift im Schwerpunkt des verdrängten Wassers an (Abb. 4.56, rechts). Wir schneiden die einzelnen Teildreiecke des Querschnitts mit der Wasseroberfläche. Liegt ein Dreieck ganz außer Wasser, liefert es keinen Beitrag. Liegt es ganz unter Wasser, bleiben Fläche und Schwerpunkt gleich. Ist bei einem Dreieck, das die Wasseroberfläche schneidet, der Teil unter Wasser wieder ein Dreieck, kann man sofort Fläche und Schwerpunkt ausrechnen. Sonst ist der abgeschnittene Teil ein Viereck, das in zwei Dreiecke zerlegt werden kann.

- Wenn der Auftrieb dem Betrag nach größer als der Abtrieb ist, wird das Schiff angehoben. Liegen die Schwerpunkte nicht übereinander, kommt ein Drehmoment hinzu. Die Querschnitte von Schiffen sind dabei so konstruiert, dass das Schiff automatisch „aufgestellt“ wird. Man betrachte dazu das Demo-Program auf der Webseite zum Buch. Siehe auch Anwendung S. 248 bzw. Anwendung S. 249.

Anwendung: Kardangelenk (Abb. 4.57)
Übertragung einer Drehung um eine Achse a auf eine Drehung um eine schneidende Achse b. Eine Gabel mit Achse a umfasst ein Kreuzgelenk, das wiederum eine Gabel mit Achse b antreibt. Der Winkel zwischen den beiden Achsen sei γ $(0° < \gamma < 90°)$.
„Antriebswinkel“ α und „Abtriebswinkel“ β sind offensichtlich verschieden.

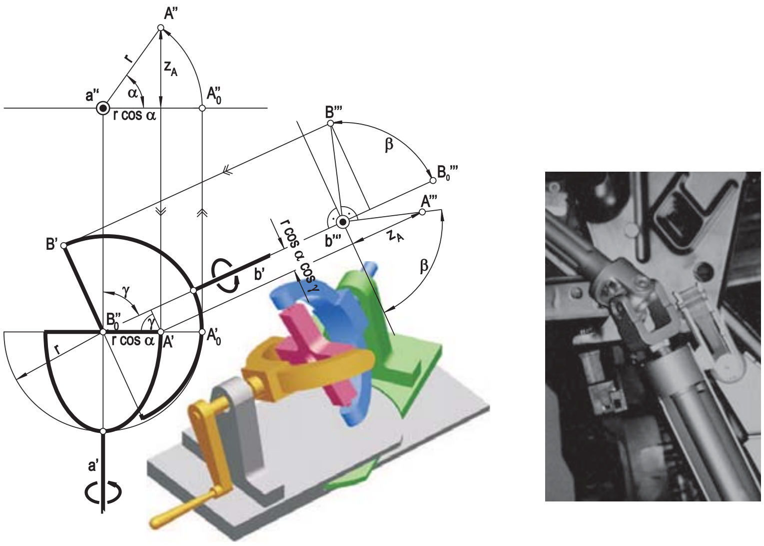

Abb. 4.57 Kardangelenk

Betrachten wir zunächst die Konstruktion einer allgemeinen Lage: Wir legen die Achsen a und b in die Grundrissebene. Aus dem Aufriss bzw. einem Seitenriss lässt sich dann folgende Beziehung ableiten:

$$\boxed{\tan\beta = \frac{1}{\cos\gamma}\tan\alpha} \tag{4.48}$$

Die Konstruktion ist keineswegs trivial und verlangt solide Kenntnisse auf dem Gebiet der darstellenden Geometrie. Nun zur Lösung des Problems mittels Vektorrechnung:
Wir verknüpfen mit dem Gelenk ein kartesisches Koordinatensystem (xy-Ebene = Ebene ab, a sei die x-Achse). Der Gabelradius sei 1. In der Ausgangslage seien die Endpunkte A bzw. B des Kreuzgelenks so gelegen, dass A