Zahlenbeispiel: Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Länge $\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Der zugehörige Einheitsvektor hat daher die Komponenten $\vec{v_0} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abtragen einer Strecke auf einer Geraden

Mittels normierter Vektoren (Einheitsvektoren) lassen sich Strecken auf gegebenen Geraden abtragen. Wenn wir z.B. einen Punkt R auf der Geraden PQ im Abstand d von P suchen, so ist dieser Punkt durch die Vektorgleichung

$$\vec{r} = \vec{p} + d\,\overrightarrow{PQ}_0, \tag{4.35}$$

festgelegt.

Winkelmessung

Einheitsvektoren sind auch der Schlüssel zur Winkelmessung im Raum. Seien $\vec{a_0}$ und $\vec{b_0}$ zwei Einheitsvektoren, die den Winkel φ miteinander einschließen. Dann gilt folgende wichtige Formel:

$$\cos\ \varphi = \vec{a_0} \bullet \vec{b_0} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \tag{4.36}$$

Beweis:

Es ist mit den Bezeichnungen von Abb. 4.25 $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{OB}$ mit $\overrightarrow{ON} = \cos\varphi\,\vec{a_0}$ und $\overrightarrow{NB} = \sin\varphi\,\vec{n_0}$ $(\vec{n} \perp \vec{a})$. Dies führt zum Ansatz

$$\cos\varphi\,\vec{a_0} + \sin\varphi\,\vec{n_0} = \vec{b_0} \tag{4.37}$$

a) Quadrieren von (4.37):

$$\cos^2\varphi\,\underbrace{\vec{a_0}^{\,2}}_{1} + \sin\varphi^2\,\underbrace{\vec{n_0}^{\,2}}_{1} + 2\,\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{a_0} \bullet \vec{n_0} = \underbrace{\vec{b_0}^{\,2}}_{1}.$$

Zusammen mit $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ folgt daraus die „Orthogonalitätsbedingung“

$$\vec{a_0} \bullet \vec{n_0} = 0.$$

b) Multiplizieren von (4.37) mit $\vec{a_0}$:

$$\cos\varphi\,\underbrace{\vec{a_0}^{\,2}}_{1} + \sin\varphi\,\underbrace{\vec{n_0} \bullet \vec{a_0}}_{0} = \vec{a_0} \bullet \vec{b_0} \Rightarrow \cos\varphi = \vec{a_0} \bullet \vec{b_0}$$

◇

Mit Formel (4.36) kann man den Winkel zweier Geraden oder zweier Ebenen berechnen, oder auch den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene.

Anwendung: Einfallswinkel des Lichtes (Abb. 4.26)

Wie groß ist der Einfallswinkel α des Lichtstrahls $\vec{s}(1, 2, -1)$ zum Lot der horizontalen Basisebene π_1 und in weiterer Folge die Helligkeit der Ebene bzw. die zugehörige Energiezufuhr (vgl. Anwendung S. 165)?

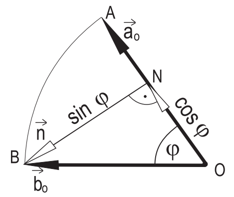

Abb. 4.25 Skalarprodukt

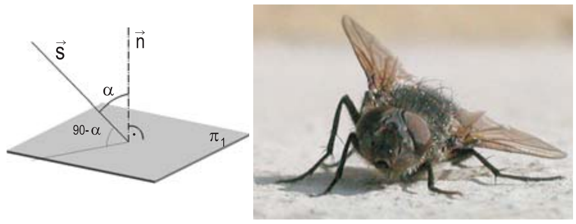

Abb. 4.26 Einfallswinkel und beste Ausnützung

Lösung:
Der Lichtstrahl weist nach unten, also messen wir den Winkel zur *negativen* z-Achse:

$$\vec{n} = \vec{n_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{s_0} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \vec{n_0} \cdot \vec{s_0} = 0{,}408 \Rightarrow \quad \alpha \approx 66^\circ$$

Nach dem *Lambert*schen Gesetz ist die Helligkeit h der beleuchteten Fläche proportional zum Kosinus des Einfallswinkel ($0 \leq h \leq 1$). Wie hell ist daher die Basisebene?

$$h = 0{,}408 \approx 41\%$$

Ohne das *Lambert*sche Gesetz zu kennen, spürt die Fliege in Abb. 4.26 rechts, dass sie sich schneller in der Morgensonne aufwärmt, wenn sie ihre Flügel möglichst steil zum einfallenden Licht stellt. Bei den wechselwarmen Insekten kann dies lebenswichtig sein.

Anwendung: Designer-Lampe (Abb. 4.27)

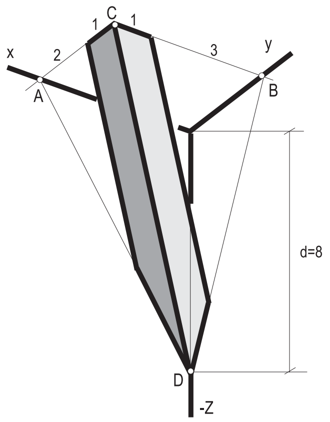

Abb. 4.27 Designer-Lampe

Ein Aluminium-Winkel dient als Reflektor einer Lampe. Man berechne

1. den Winkel BCD ($\cos\gamma = \overrightarrow{CB}_0 \cdot \overrightarrow{CD}_0$),
2. den Winkel ADB ($\cos\delta = \overrightarrow{DA}_0 \cdot \overrightarrow{DB}_0$) und
3. den Biegewinkel (Winkel β der Ebenen ACD und BCD).

Mögliche Zusatzfragen: Länge der Kanten, Fläche des Zuschnitts (siehe Fläche eines Dreiecks).

Lösung:
Mit den Bemaßungen von Abb. 4.27 haben die relevanten Punkte die Koordinaten $A(4/0/0)$, $B(0/3/0)$, $C(4/3/0)$, $D(0/0/-8)$. Dann erhalten wir mit $\cos\gamma = \overrightarrow{BC}_0 \cdot \overrightarrow{CD}_0$ den Winkel $\gamma \approx 65^\circ$ und mit $\cos\delta = \overrightarrow{DA}_0 \cdot \overrightarrow{DB}_0$ den Winkel $\delta \approx 33^\circ$.

Nun zur Berechnung des Biegewinkels: Der Winkel der Ebenen ACD und BCD wird als Winkel der beiden normierten Normalvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ gemessen. Von diesem wird das Supplement auf 180° angegeben, weil aus der gestreckten Lage (180°) gebogen werden muss ($\beta \approx 81°$). ♠

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Sei T ein Raumpunkt und $\vec{n_0}\,\vec{x} = c$ die Gleichung einer Ebene ε. Dabei sei $\vec{n_0}$ bereits normiert. Dann hat T von ε den (vorzeichenbehafteten) Abstand

$$d = \overline{T\varepsilon} = \vec{n_0} \cdot \vec{t} - c. \tag{4.38}$$

Lotfußpunkt in einer Ebene

Insbesondere lässt sich damit bequem der Lotfußpunkt F des Punktes T auf die Ebene ε ermitteln:

$$\vec{f} = \vec{t} - d\,\vec{n_0} = \vec{t} - (\vec{n_0} \cdot \vec{t} - c)\,\vec{n_0}. \tag{4.39}$$

Anwendung: Hellster Punkt einer ebenen Fläche
T sei eine Lichtquelle. Man ermittle den Punkt F der Dachebene, der am stärksten beleuchtet ist (Abb. 4.19).

Lösung:
Es handelt sich dabei um den Lotfußpunkt aus T auf die Dachebene ε, weil in diesem Punkt der Einfallswinkel des Lichtes zum Lot gemessen minimal ist. ♠

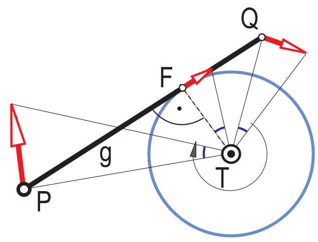

Abb. 4.28 Punkt mit minimaler Geschwindigkeit

Anwendung: Rotation einer Geraden (Abb. 4.28)
Eine Gerade g rotiert um einen Punkt T und hüllt dabei einen Kreis ein. Man ermittle jenen Punkt F auf g, der die geringste Bahngeschwindigkeit hat (d. i. der Berührpunkt mit dem Hüllkreis).

Lösung:
Wir sind in der Ebene. Die 3. Komponente der Vektoren wird also Null gesetzt. Wir verwenden Formel (4.39) mit $\vec{n_0} \perp \overrightarrow{PQ}$ (Formel (4.19)). ♠