Anwendung: Bahngeschwindigkeit eines Satelliten (Abb. 0.1)
Satelliten umkreisen die Erde in Höhen ab 150 km. Um „im Gleichgewicht der Kräfte“ zu sein, müssen sich die Erdanziehungskraft (Gewicht G) und die Fliehkraft F „aufheben“. Wir wollen nun einen Bezug zwischen Bahngeschwindigkeit, Umlaufzeit und Flughöhe ableiten.

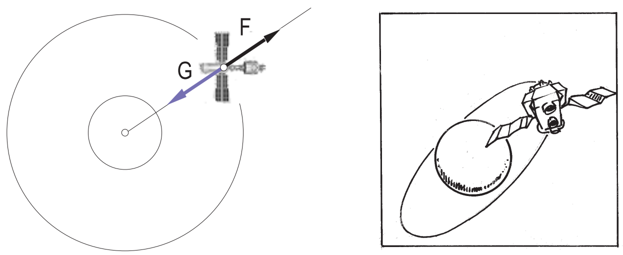

Abb. 0.1 Schwerelosigkeit durch Fliehkraft

Sei R der Erdradius ($R = 6\,370\,\mathrm{km}$) und r der Abstand des Satelliten (Masse m) vom Erdmittelpunkt. Auf der Erdoberfläche hat der Satellit das Gewicht $G_R = mg$. Die Anziehungskraft nimmt mit dem Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt ab (*Newton*). Im Abstand $r = k\,R$ reduziert sich damit das Gewicht auf $G_r = G_R \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2 = \dfrac{G_R}{k^2}$. Für die Fliehkraft (bzw. Zentrifugalkraft) gilt die bekannte Formel $F = mv^2/r$. Mit $F = G_r$ gilt für die Fluggeschwindigkeit im Abstand r:

$$\frac{m\,v_r^2}{r} = m\,g\left(\frac{R}{r}\right)^2 \Rightarrow v_r^2 = g\,\frac{R}{r}\,R = \frac{g\,R}{k} \Rightarrow k\,v_r^2 = g\,R = \text{konstant}$$

Wir haben also

$$k\,v_r^2 = 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow v_r\,\sqrt{k} \approx 7\,905 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 28\,460 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

oder

$$v_r = \frac{7{,}90}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = \frac{28\,460}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{0.1}$$

Der Faktor k berechnet sich aus der Flughöhe H mittels

$$k = \frac{r}{R} = \frac{R + H}{R}.$$

Der Erdumfang beträgt $U_R = 40\,000\,\mathrm{km}$. Mit zunehmender Höhe nimmt der Umfang – also die Länge der Flugstrecke – linear mit k zu:

$$U_r = k\,U_R.$$

Somit gilt für die sog. „siderische Umlaufzeit“ T (auf den Fixsternhimmel bezogen):

$$T = \frac{U_r}{v_r} = \frac{k \cdot 40\,000\,\mathrm{km}}{\frac{7{,}9}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} \approx k^{3/2} \cdot 5\,060\,\mathrm{s} \approx k^{3/2} \cdot 1{,}41\,\mathrm{h} \tag{0.2}$$

Die Ergebnisse sollen übersichtlich in einer Tabelle zusammengestellt werden.

H in km	150	500	2 000	R=6 370	31 850	377 000
$k = (R + H)/R$	1,024	1,078	1,314	2	6	60,3
v_r in km/h	28 140	27 300	24 830	20 120	11 620	3 665
Umlaufzeit in h	1,46	1,57	2,12	3,99	20,7	660

Wir erkennen: Je größer die Flughöhe, desto geringer die Fluggeschwindigkeit und desto länger die Umlaufzeit. Wenn wir zwei Satellitenbahnen (k_1 und k_2) vergleichen, so gilt nach Formel (0.2):

$$T_1 : T_2 = k_1^{3/2} : k_2^{3/2} \Rightarrow T_1^2 : T_2^2 = k_1^3 : k_2^3 = r_1^3 : r_2^3$$

Damit haben wir für eine kreisförmige Umlaufbahn verifiziert:

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Radien (3. Keplersches Gesetz).

Anwendung: Siderische und synodische Umlaufzeit des Mondes

Die letzte Spalte der obigen Tabelle betrifft die Umlaufbahn des Mondes, der ja auch als Satellit der Erde – mit einem durchschnittlichen Abstand von 384 400 km – angesehen werden kann (man muss allerdings bedenken, dass der gemeinsame Schwerpunkt von Mond und Erde nicht der Erdmittelpunkt ist, sodass man sich nur auf wenige Kommastellen verlassen sollte). Der Mond braucht *siderisch* ca. 660 h $\approx$ 27,5 d, um die Erde zu umrunden. Der Zeitraum von einem Neumond zum nächsten („synodischer Monat“) ist länger, weil der Mond zusätzlich die Erddrehung während der doch recht langen Zeit kompensieren muss. Er beträgt$\approx 29\frac{1}{2}\,d$.

Der Mond vergrößert seinen Abstand jährlich um einige Zentimeter, wird also langsamer. Vor Abermillionen Jahren erschien der Mond am Firmanent größer und die Sonnenfinsternisse waren ausgeprägter.

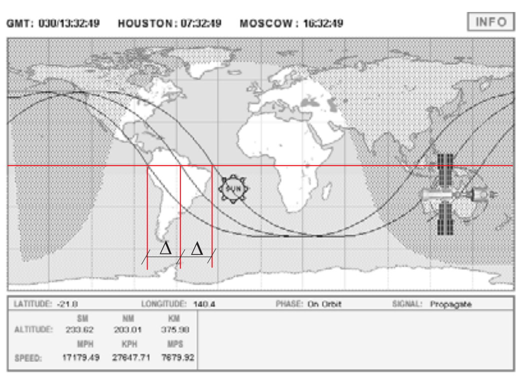

Abb. 0.2 Klassische Flugbahn eines Satelliten

Anwendung: Geostationäre Satelliten

Wir haben in Anwendung S. i gesehen, dass höher fliegende Satelliten langsamer fliegen müssen, um die – ohnehin schon geringere – Anziehungskraft mittels Fliehkraft aufzuheben. Wenn ein über dem Äquator fliegender Satellit (mit derselben Umlaufrichtung wie die Erdkugel) genau 23,93 h (siehe oben)

Umlaufzeit hat, dann bleibt er relativ gesehen immer über demselben Punkt am Äquator. Tatsächlich „stehen“ einige Wettersatelliten über dem Äquator! Wir haben für so einen „geostationären“ Satelliten mit Formel (0.2) die Bedingung

$$T = k^{3/2}\,1{,}41\,\mathrm{h} = 23{,}93\,\mathrm{h} \Rightarrow k = 16{,}97^{2/3} \approx 6{,}60. \qquad (0.3)$$

Das entspricht einem Abstand vom Erdmittelpunkt von $6{,}60 \cdot R$ bzw. einer Flughöhe von $5{,}60 \cdot R \approx 35\,700\,km$. Die zugehörige Bahngeschwindigkeit ist gemäß Formel (0.1) immerhin noch etwa $11\,000\,\mathrm{km}/h$. Das Wort „stehen“ ist also ausschließlich relativ zu sehen!
Ein geostationärer Satellit *muss* über dem Äquator fliegen: Jede Satellitenbahn hat ja den Erdmittelpunkt als Zentrum. Ein „Fixpunkt“ über einem nicht auf dem Äquator befindlichen Punkt dreht sich aber in einer Ebene, die den Erdmittelpunkt nicht enthält.[1]

[1] Eine interessante Webseite ist `http://www.sat.dundee.ac.uk`, wo man täglich neue Aufnahmen aus geostationären Satelliten von allen Teilen der Erde finden kann.