Anwendung: Verbiegung von Minimalflächen

Weierstrass hat bewiesen, dass der Realteil einer Minimalkurve eine Minimalfläche ist (vgl. Anwendung S. 317). Man berechne den Realteil der komplexen Schraublinie Formel (A.22) für $R = 1$ bzw. $R = i$.

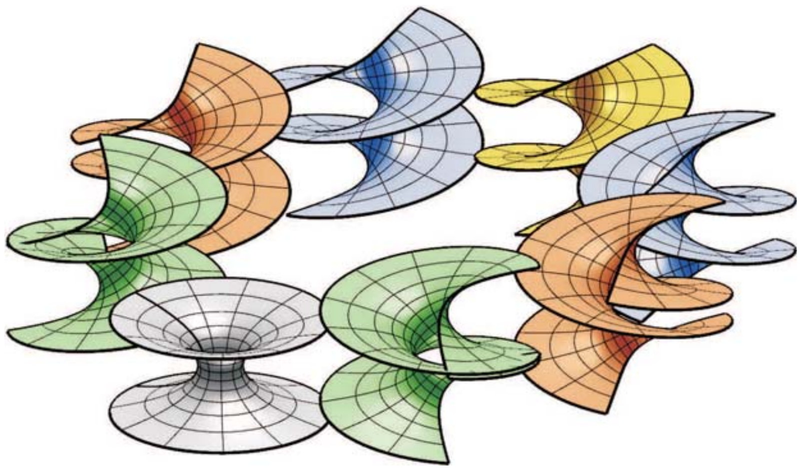

Abb. A.22 Verbiegung der Kettenfläche (grau) in die Wendelfläche (gelb)

Lösung:
Wir schreiben in diesem Beispiel zur leichteren Unterscheidung reelle Zahlen immer klein und komplexe Zahlen (außer der Einheit i) immer groß.
Für $R = 1$ lautet Formel (A.22) $X = \sin T,\ Y = \cos T,\ Z = i\,T$.
Setzen wir $T = u + i\,v$, dann sind die Realteile davon nach Formel (A.20) und Formel (A.21)

$$x = \sin u \cosh v,\ \ y = \cos u\, \cosh v,\ \ z = -v. \tag{A.23}$$

Deuten wir u und v als Flächenparameter, dann erkennen wir in diesen Gleichungen die Parameterdarstellung eines Katenoids (einer Kettenfläche, vgl. Anwendung S. 317 bzw. Abb. A.22 links).
Für $R = i$ lautet Formel (A.22) $X = i \sin T,\ Y = i \cos T,\ Z = -T$.
Die Realteile davon sind $x = -\cos u \sinh v,\ y = \sin u\, \sinh v,\ z = -u$ oder, mit der Abkürzung $r = \sinh v$

$$x = -r \cos u,\ \ y = r \sin u,\ \ z = -u. \tag{A.24}$$

Mit den Flächenparametern r und u ist dies eine Parameterdarstellung einer Wendelfläche (siehe Anwendung S. 222 bzw. Abb. A.22 rechts).
Für die restlichen komplexen Einheitszahlen $R = e^{i\varphi}$ ergeben sich Flächen, die „Zwischenstadien“ zwischen der Ketten- und der Wendelfläche sind (auch hier ist eine Parameterdarstellung möglich). Sie alle sind Minimalflächen, deren Berechnung und Darstellung wir getrost dem Computer überlassen wollen. Auf der Webseite zum Buch finden Sie ein Programm, das Ihnen die kontinuierliche Verbiegung aus jeder gewünschten Ansicht zeigt (`minimalflaechen.exe`). Weil das Programm mit komplexen Zahlen genauso wie mit reellen Zahlen rechnen kann, war der Programmieraufwand sehr gering.

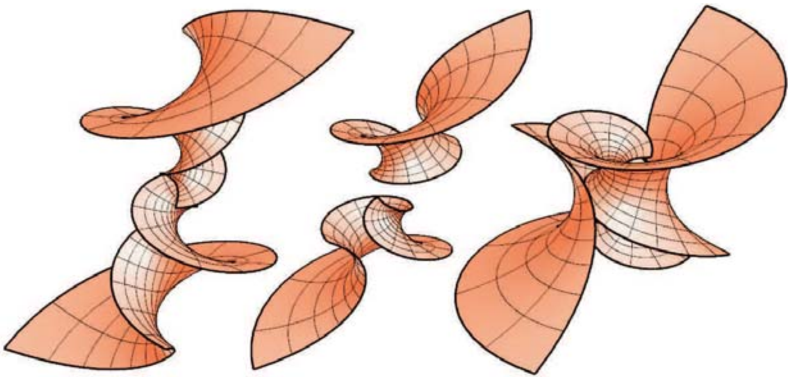

Abb. A.23 „Tanz der Minimalspiralflächen"

Ersetzt man die Minimalschraublinie aus Anwendung S. 393 durch andere Minimalkurven, erhält man eine Vielfalt von Flächen, die ineinander kontinuierlich verbiegbar sind. Die Flächen in Abb. A.23 stellen sich ein, wenn man statt Schraublinien Spirallinien wählt.

Die letzten Beispiele sollten deutlich gemacht haben, wie unglaublich effizient gewisse Sachverhalte im Komplexen beschrieben werden können. „Von einer höheren Warte aus" – oder auch „in einer höheren Dimension" – erscheinen manchmal komplizierte Zusammenhänge ganz naheliegend. So ähnlich ist es ja auch, wenn wir uns aus der Ebene in den Raum hinausbewegen und dann die vielen Gemeinsamkeiten der Kegelschnitte in einem anderen Licht sehen. ♠