Die Triviallösung $x = 0$ ist der Abschusspunkt. Die nicht triviale Lösung erhält man nach Division durch $x(a_1 - a_2) \neq 0$:

$$x_s = (b_2 - b_1) : (a_1 - a_2)$$

Wenn die Geländeneigung eine solche Wurfweite überhaupt zulässt, „überholt“ ab der Schnittstelle die flachere Parabel die steilere. ♠

**Anwendung: Brechungsgesetz** (Abb. 3.63)
Nach dem Brechungsgesetz gilt für den Einfallswinkel $\alpha$ und den Ausfallswinkel $\beta$ beim Übergang von Luft in Wasser $\sin\alpha : \sin\beta = 4 : 3$ Es gibt von der Atmosphäre her keine Totalreflexion, d.h. alle Lichtstrahlen werden – zumindest teilweise – ins Wasser abgelenkt.

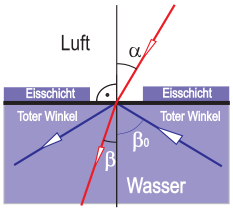


**Abb. 3.63** Totalreflexion

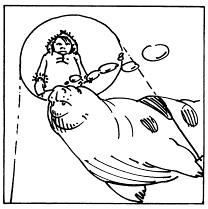

**Abb. 3.64** Die Situation im Wasser...

Umgekehrt gibt es aber einen kritischen Winkel $\beta_0$, ab dem kein Licht mehr vom Wasser durch die Oberfläche gelangt. $\beta_0$ ergibt sich für den Maximalwert 1 von $\sin\alpha$:

$$\frac{1}{\sin\beta} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin\beta_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta_0 \approx 48{,}6^\circ$$

Eine Robbe, die im toten Winkel anschwimmt (Abb. 3.63), kann den Inuit, der beim Luftloch in der Eisschicht auf sie wartet, nicht sehen: Die einzigen Lichtstrahlen, die zum Jäger führen, werden durch das Eis abgeschirmt. Auch der Inuit sieht die Robbe erst, wenn sie die Nasenlöcher aus dem Wasser streckt (Abb. 3.64)! ♠

**Anwendung: Wer sieht wen?**

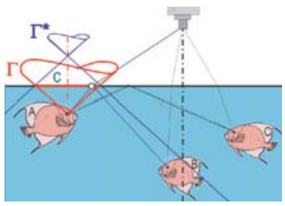


**Abb. 3.65** Wer sieht hier wen? Keineswegs trivial!

**Abb. 3.66** Totalreflexion außerhalb $\Gamma^*$ (links ist der Spurkreis von $\Gamma^*$ zu sehen)

Im ruhigen Wasserbecken (Abb. 3.65 links) sieht Fisch $A$ (der Taucher)

- „alles“ außerhalb des Pools, wenn auch zum Teil stark verzerrt. Das gebrochene Bild liegt innerhalb eines Kreises $c$ auf der Oberfläche. Dieser Kreis ist Spurkreis eines Drehkegels $\Gamma$ mit dem Öffnungswinkel $2 \times 48{,}6^\circ$;

- die Totalreflexionen jener Teile des Beckens, die außerhalb des reflektierten Kegels $\Gamma^*$ liegen, z.B. Fisch $C$ (besonders deutlich in Abb. 3.66 links);
- Reflexionen des übrigen Beckens (z. B. Fisch $B$) innerhalb $c$ – als Folge von Teilreflexion (je ruhiger die Wasseroberfläche, desto deutlicher);
- die Fische $B$ und $C$ auch direkt!

Auf einer Fotografie von außerhalb des Beckens (etwa vom Sprungbrett) sieht man alle Fische – teilweise stark verzerrt. ♠

### Anwendung: Brechung an einer Kugeloberfläche

Man leite mit der Näherung $\sin x \approx \tan x \approx x$ für kleine $x$ (Anwendung S. 286) Formel (3.29) für die Brechung an einer sphärischen Oberfläche ab.

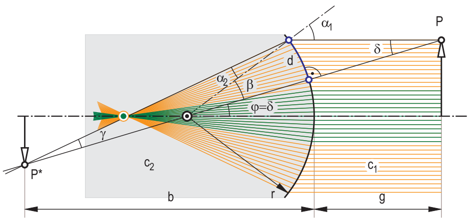


**Abb. 3.67** Brechung an einer kugelförmigen Oberfläche

*Lösung*:
Mit den Bezeichnungen von Abb. 3.67 gelten für die Außenwinkel $\beta$ und $\alpha_1$ die Beziehungen

$$(1) \quad \beta = \alpha_2 + \gamma \qquad\qquad (2) \quad \alpha_1 = \delta + \beta$$

Sind $c_1$ und $c_2$ die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Lichts in den beiden Medien, dann gilt nach dem Brechungsgesetz (Anwendung S. 281)

$$n = c_1 : c_2 = \sin\alpha_1 : \sin\alpha_2 \approx \alpha_1 : \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad (3) \quad \alpha_2 \approx \frac{1}{n}\alpha_1$$

Dies führt zu

$$\beta = \frac{1}{n}(\delta + \beta) + \gamma \;\Rightarrow\; \delta + \beta + n\gamma = n\beta \;\Rightarrow\; \delta + n\gamma = (n-1)\beta$$

Weiter gilt

$$\tan\delta \approx \delta \approx \frac{d}{g}, \quad \sin\beta \approx \beta \approx \frac{d}{r}, \quad \tan\gamma \approx \gamma \approx \frac{d}{b}$$

und somit die Näherungsformel

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r} \tag{3.29}$$

$r$ ist der Kugelradius, $g$ und $b$ sind die Gegenstandsweite bzw. Bildweite. Die Linsengesetze in dieser einfachen Form gelten immer nur für kleine Winkel $\varphi = \delta$ in der Umgebung der optischen Achse (Gaußscher Raum), in Abb. 3.67 durch grüne Strahlen gekennzeichnet. Die orangen Strahlen in größerer Entfernung von der Achse hüllen eine „Brennlinie“ ein, gehen also nicht mehr durch den Brennpunkt der Linse (Abb. 1.10 links). ♠