Vorwort

Vorwort

Wie jedes Buch hat auch dieses seine eigene „Geschichte". Nach vielen Jahren Lehr- und Forschungstätigkeit und einigen Büchern über Mathematik, Geometrie, Computergrafik und neuerdings auch Fotografie sollte es als Resultat der langjährigen Erfahrungen in relativ kurzer Zeit entstehen. Es schien doch sehr viel Material vorhanden zu sein, das „nur noch" in den Kontext eingebunden werden musste. Wie immer war es viel mehr Arbeit als gedacht, und ich muss mich bei meiner Frau Romana und meiner Tochter Sophie für das große Verständnis und die Unterstützung bedanken, die dafür notwendig waren.

Meine Mitarbeiter Franz Gruber und Peter Calvache halfen mir weit über das jemals einforderbare Maß. Ohne Grubers anspruchsvolle Computersimulationen (erstellt mit der Software Open Geometry, die „hausintern" entwickelt worden war) und Calvaches bemerkenswertem Gespür für ein ansprechendes Layout hätte das Buch einfach nicht so werden können, wie es nun vorliegt. Eine weitere große Stütze war Rudolf Waltl. Er hat viele Ideen (vor allem physikalischer Art) eingebracht, einige (zumeist technische) Fotos beigesteuert und auch ausgezeichnete Recherche betrieben.

In der Endphase mussten wegen der Bandbreite der Anwendungen externe Spezialisten konsultiert werden, so etwa der Physiker Georg Fuchs und die Biologen Axel Schmid und Roland Albert, bei denen ich mich für viele Anregungen und Hinweise bedanken möchte. Dazu kam immer wieder das nützliche und wichtige Feedback des Verlags (Andreas Rüdinger und Bianca Alton).

In den letzten Monaten vor der Fertigstellung entwickelte sich eine erstaunliche Eigendynamik, bei der gesammeltes Material und neue Erkenntnisse in einem steten Mischvorgang an die geeignete Position gebracht wurden – eine positive Spirale sozusagen. Nachdem im Buch u. a. von Schraubung bzw. Spiralung die Rede sein wird, soll gleich ein Objekt dargestellt werden, das im Wesentlichen aus zwei Schraubkörpern besteht (der äußere ist linksgewunden, der innere rechtsgewunden). Solche Objekte eignen sich gut zum Durchmischen oder

Durchkneten, und das musste oft genug passieren ...

Fast symbolisch für die letzte Phase könnte auch das Schlüpfen eines Insekts aus seiner Larve bzw. Puppe sein. Die Bilder zeigen oben die verlassene Chitinhülle einer Zikade, auf der schon alle Details zu erkennen sind, unten das fertige „Imago". Das eigentliche Insektenleben spielt sich – oft über viele Jahre – unsichtbar unter der Oberfläche ab. Das Imago ist also nur eines von mehreren Stadien und hauptsächlich für die Reproduktion der Spezies verantwortlich.

Der Titel des Buchs hat auch eine erwähnenswerte Entwicklung: Irgendwie sollten ja Begriffe wie Mathematik, Fotografie und Biologie in Einklang gebracht werden. Als knapp die Hälfte des Buchs beisammen war, hielt ich vor Studierenden der Universität für angewandte Kunst Wien (Abteilung Werbegrafik) eine Präsentation, wobei ich die Anwesenden bat, mir nachträglich Titelvorschläge zu machen. Das Echo war enorm und es kamen viele Vorschläge, die durchaus brauchbar waren. In einem internen Auswahlverfahren kam dann jener Titel heraus, der heute auf dem Umschlag steht.

Es ist natürlich nicht gleichgültig, ob man formuliert: „Wie aus der Zahl ein Zebra wird" oder aber „Wie aus dem Zebra eine Zahl wird". Die erste Variante ist die größere Herausforderung. Die Natur war klarerweise vor der Mathematik da. Anderseits spielen sich in der Natur ununterbrochen Prozesse ab, die wir heute als „mathematisch" bezeichnen. Dementsprechend lautete ein anderer Titelvorschlag „Überall Mathematik". Das Doppelseiten-Prinzip, das in diesem Buch konsequent eingehalten wird, hat den Vorteil, dass man sich in leicht verdaubaren Häppchen das eine oder andere Thema zu Gemüte führen kann. Querverweise, insbesondere aber Literaturangaben und ausgewählte Internet-Links sollen ggf. zur Vertiefung dienen.

Aber ab sofort soll es heißen: Viel Spaß beim Lesen!

Wien, im Juli 2010
Georg Glaeser

Mathematik und Naturfotografie

Ich bin Mathematiker (mit Spezialgebiet Computergeometrie) und leidenschaftlicher Naturfotograf. Gibt es da einen echten Zusammenhang, oder muss man ihn an den Haaren herbeiziehen? Nun, wenn Sie dieses Buch durchgeblättert haben, werden Sie die Antwort, die ich hier gebe, nachvollziehen können: Es wimmelt in der Natur nur so vor Beispielen, die irgendwie mit Mathematik zu tun haben. Die Fotografie spielt eine wesentliche Rolle, dies zu erkennen.

In der Mathematik werden oft Formen der Natur modelliert, die eindeutig zuzuordnen sind. Das Kristallgitter eines Diamanten ist z. B. perfekt tetraedrisch. Allerdings ist das schwer fotografisch nachzuweisen. Einigermaßen geometrische Kristalle gibt's auch zuhauf, aber die sind, wenn zu sehen, nicht mehr so perfekt (Foto: Calcit-Kristalle, unter denen sich viele vierseitige Doppelpyramiden befinden).

In einem Vortrag habe ich einmal vereinfachend gesagt: Die Natur ist niemals perfekt, denn sonst gäbe es uns Menschen nicht. Das war eine Anspielung auf die Evolution und nicht etwa als Scherz gemeint (das Publikum sah es damals so).

Die Natur ist vielmehr pragmatisch und akzeptiert Lösungen, die sich durch Selektion oder zufällige Konstellation ergeben, wenn diese Lösung besser ist als eine vorher vorhandene. Sie ist gleichzeitig ununterbrochen bereit, neue Formen zu akzeptieren, die unter geänderten Umständen ein neues Optimum darstellen. Das gilt für die Entwicklung von Lebewesen genauso wie für die Ausbildung von Formen oder Mustern.

Das Computerzeitalter hat den Mathematikern ungeahnte Möglichkeiten eröffnet. Heute kann man Dinge visualisieren, die früher als unerreichbar galten. Insbe-

sondere kann man auch gezielt Vorgänge, die in der Natur stattfinden, simulieren. Hier erlaubt die computergestützte Mathematik das Experimentieren mit Parametern, und dies ist eine legitime, ja oft schlicht notwendige Methode geworden, schneller zu Ergebnissen zu gelangen.

Lösung eines Problems kann im konkreten Fall bedeuten: Begreifen, wie manche Vorgänge in der Natur vor sich gehen, welche Mechanismen ineinandergreifen und zusammenspielen. Bemerkenswert ist, dass einzelne Vorgänge lokal betrachtet eigentlich ganz einfach zu erklären sind, während sich die Komplexität und Vielfalt der Gesamterscheinung oft einer sofortigen Erklärung verschließt.

Dies mag bereits ein Teil des Erfolgsrezepts der Mathematik beim Versuch, die Natur zu verstehen, sein. In der Infinitesimalrechnung betrachtet man ja auch beliebig kleine Umgebungen, in denen diese oder jene Eigenschaft gilt. Durch „Integrieren" wird dann versucht, aufs Ganze zu schließen. Bei der Modellierung von dynamischen Prozessen kann jede auch noch so kleine Änderung im Kleinen das Gesamtergebnis maßgeblich beeinflussen. Niemand wird z. B. abstreiten, dass Wetterprognosen heute schon um ein Vielfaches besser geworden sind als noch vor wenigen Jahrzehnten. Dennoch sind zugegebenermaßen so viele Parameter im Spiel, dass es eben immer noch Ungenauigkeiten gibt.

Der Blitz oben hat wohl noch viel mehr Spielraum als Wolkenfelder, sich zu verästeln. Aber selbst hier arbeitet die Wissenschaft intensiv daran, das Phänomen zu verstehen. Ein erster Schritt dazu muss das präzise Erfassen des Phänomens sein, etwa mit Hochgeschwindigkeitskameras. Womit wir spätestens jetzt bei der Fotografie gelandet sind.

Diamant-Struktur **Diamantstruktur** http://de.wikipedia.org/wiki/Diamantstruktur
ORF **Blitzforschung** http://salzburg.orf.at/magazin/leben/stories/53864/

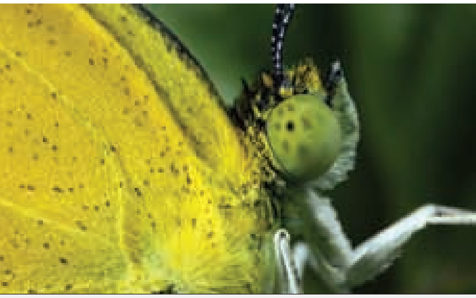
Inhaltsverzeichnis

Dieses Bild eines 6 mm kleinen Prachtkäfers Anthaxia nitidula passt gleich zu mehreren Themen: „Schillerfarben" (s. S. 150), „Einfach Wegblenden" (s. S. 242), „Phänomen Komplexauge" (s. S. 42), „Zehnerpotenzen im Tierreich" (s. S. 224) – man betrachte die zufällig mit aufgenommene 0,1 mm große weiße Milbe im roten Kreis, die, weil 50 Mal so klein, weniger als 1/100 000 des Käfers wiegt.

Dieses Buch bietet eine fotografisch-mathematische Reise in das Reich der Natur mit ihren Phänomenen und den faszinierenden Resultaten der Evolution. Selbst ohne höhere Mathematik, aber mit geschärftem mathematischem Hausverstand und einem fantasievollen Herangehen an die Dinge kann man viele Dinge, die zunächst „einfach nur da sind", besser verstehen und u. U. Schlüsse daraus ziehen. Den Einleitungstext zu den Kapiteln finden Sie hier im Inhaltsverzeichnis. Das Bild links stellt Zellstrukturen in einem Blatt dar, die man mathematisch gut modellieren kann.

Mathematik ist mehr als nur „Rechnen". Sie ist ein vom Menschen künstlich geschaffenes Konstrukt mit strengen Regeln, in der es nur „Schwarz oder Weiß" bzw. „wahr oder falsch" gibt. Die Natur scheint da ganz anders zu sein, und dennoch hat die Mathematik wie keine andere Wissenschaft die Fähigkeit, natürliche Prozesse zu modellieren und dabei zu tieferen Einsichten in diese Prozesse zu gelangen. Das Titelbild zeigt eine stehende Welle beim Abfluss eines Teichs. Sogar die Interferenzen der Wellen änderten sich dabei kaum, das Bild war „wiederholbar" und könnte bei bekannten Parametern vom Computer „nachvollzogen" werden.

Die womöglich Jahrtausende alte Felszeichnung wurde von den San (Ureinwohner des südlichen Afrikas) angefertigt und illustriert eine Jagd mit Pfeil und Bogen. Die beim Pfeilflug auftretenden Wurfparabeln wurden (und werden) von den San mit unglaublicher Präzision einkalkuliert, ohne jemals eine Berechnung durchgeführt zu haben. In diesem Kapitel sollen exemplarisch Themen angeschnitten werden, bei denen sich ein Mathematiker vielleicht mehr denkt als ein Nicht-Mathematiker. So geht es z. B. um vermeintliche, aber auch erklärbare Ähnlichkeiten.



In der Nahaufnahme eines hübschen Schmetterlings sind dunkle Punkte in den Komplexaugen zu sehen (Pseudopupillen), die von den Kristallprismen, die in jeder Facette eingebaut sind, erzeugt werden. Das Tier sieht auf kurze Distanzen ausgezeichnet dreidimensional. Warum das so ist, wie Stereo-Sehen und Vergleichbares funktioniert, aber auch sonst einige Regeln über perspektivisches und dreidimensionales Erfassen sind Thema dieses Kapitels. Man erkennt auch, dass wir recht leicht optisch verwirrt werden können, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind.

Der Blick ins Weltall war immer schon ein menschlicher Traum. Wir müssen uns hier auf unsere Sonne, unseren Mond und das eine oder andere markante Sternbild begrenzen. Viele Phänomene, die mit den Gestirnen zusammenhängen, erwecken das Interesse des Mathematikers. Ein recht einfacher geometrischer Satz über den rechten Winkel gibt uns z. B. Auskunft über durchaus nicht-triviale Fragen zum exakten Frühlingsbeginn bzw. der vermeintlich falschen Mondneigung. Letztere ist auch in dem abgebildeten mittelalterlichen Fresco der St. Laurentzkirche in Požega (Kroatien) „verewigt".

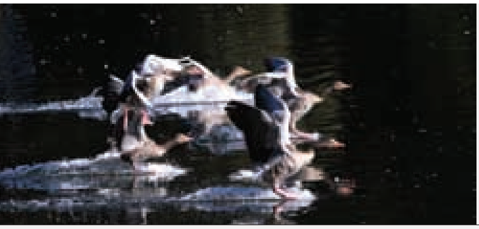
Noch bevor wir verschiedene Typen von Kurven und Flächen betrachten, wollen wir die Schraubung und Spiralung unter die Lupe nehmen. Erstere spielt in vielen technischen Anwendungen eine zentrale Rolle (als Symbol dafür ist ein Schraubengewinde samt Schraubenmutter abgebildet). Die Spiralung ist in der Kunst, vor allem aber in der Natur omnipräsent und besonders schön bei Schneckenhäusern, Muscheln (Foto links) und Tierhörnern manifestiert. Hier spielen exponentielles oder lineares Wachstum und Rotation zusammen.

Kurven wie z. B. die Kettenlinie können in einer Ebene liegen oder auch „echte Raumkurven" sein, wie der abgebildete Trieb einer Kletterpflanze, welche – ganz untypisch für unsere Vorstellung von Pflanzen – durch Drehen und Wippen versucht, ihre räumliche Umgebung zu erfassen und irgendwo Halt zu finden. Die Kegelschnitte sind zu Recht die berühmtesten Kurven: Sie finden sich in der Natur zuhauf (die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, die Wurfbahnen von Objekten sind Parabeln, Schatten und perspektivische Bilder von Kreisen sind oft Hyperbeln).

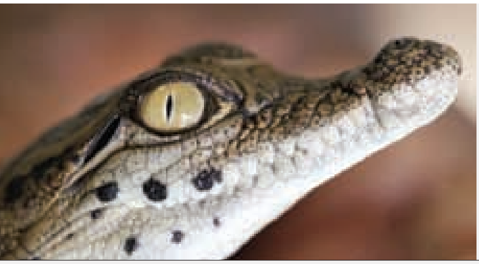
Noch viel größer als die Vielfalt der Kurven ist jene der gekrümmten Flächen. Die Kugel übt wegen ihrer unendlichfachen Symmetrie große Faszination auf uns aus. Ihre Oberfläche ist doppelt gekrümmt und damit nicht ohne Dehnungen und Stauchungen in die Ebene auszubreiten. Jene Flächenteile, welche bei der abgebildeten Lampe in Summe eine Kugel annähern, entstehen durch Verbiegen von ebenen rautenförmigen Streifen und sind damit nur einfach gekrümmt. Oberflächen, die sich in einem Spannungsgleichgewicht befinden, sind (doppelt gekrümmte) Minimalflächen.

Spiegelung und Brechung gehören eng zusammen: Wenn z. B. die Sonne an der Wasseroberfläche reflektiert, gelangt – je nach Einfallswinkel – ein Teil des Lichts in das Wasser. Die Umkehrung ist nicht mehr so selbstverständlich: Flach von unten auf die Wasseroberfläche treffendes Licht wird zur Gänze reflektiert. Der winzige Gecko auf der Glasscheibe erscheint doppelt reflektiert: einmal an der Oberseite der Scheibe, das andere Mal auf der Rückseite. Die dazwischen stattgefundene doppelte Brechung an der Vorderseite „hebt sich auf".

Sehr oft tritt das Problem auf, möglichst viele Elemente auf möglichst kleinem Raum sinnvoll so zu verteilen. Die jungen Nilkrokodile am Bild sollen symbolisch dieses Problem veranschaulichen. Da ist etwa die vermeintlich einfache Frage, wie man eine vorgegebene Anzahl von Punkten auf einer Kugel verteilt. In der Natur will z. B. ein Seeigel seine Stacheln optimal auf seiner Kalkhülle verteilen. Hier gibt es mathematisch-physikalische Algorithmen, die das Problem durch Simulation von Abstoßung der einzelnen Teilchen hervorragend bewältigen.



Mathematik und Physik haben in vielen Teilen Überlappungen. Die Fragen, auf welchem Anlauf ein Schispringer zum besten Sprung ansetzt oder wie weit sich ein Motorrad in die Kurve legen muss, gehören zweifellos in so eine Nische. Schon deutlich physikalischer ist die Frage, warum Tiere wie die abgebildeten Enten oder aber Flugzeuge fliegen können oder welche Wellenformationen bei bewegten Erregerquellen entstehen.



Wenn ein Mathematiker die Anordnung der Schuppen auf einem Reptil wie dem abgebildeten jungen Nilkrokodil betrachtet, assoziiert er damit sofort sogenannte Voronoi-Diagramme. Inwieweit hier ein Zusammenhang besteht und ob womöglich auch das Stützgerüst in Libellenflügeln oder Blättern von Grünpflanzen oder gar die Risse in trocknendem Schlamm solche Strukturen enthalten, sind Themen dieses Kapitels, ebenso warum man auf Gänseblümchen, Sonnenblumen oder Pinienzapfen Spiralen zu erkennen glaubt.